

CÓDIGO ESTRUCTURAL

CÁLCULO DE FLECHAS

CYPE Ingenieros



**DESCRIPCIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO DE
FLECHAS PARA ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO**

1.- CONSIDERACIONES PREVIAS SOBRE EL CÁLCULO Y LIMITACIÓN DE FLECHAS

Previamente al desarrollo del procedimiento aplicado para el cálculo de flechas, deben tenerse en cuenta las consideraciones siguientes:

- La flecha de una pieza es una variable aleatoria, como la resistencia del hormigón o el ancho de fisuras. Su conocimiento no es posible y únicamente puede estimarse con un nivel de fiabilidad adecuadamente alto ⁽¹⁾
- Además, el problema de las deformaciones no consiste sólo en calcular las flechas, sino también en comprobarlas con unos valores límites que se establecen para evitar ciertos niveles de daño. Cada método de cálculo de flechas es coherente con el sistema de limitación de flechas al que va asociado.
- En el cálculo de la flecha para una determinada combinación de carga en un instante determinado, se corrige la deformada elástica, obtenida del cálculo, por el factor de rigidez pertinente: $(E_{elast} \cdot I_{elast} / E(t) \cdot I_{equivalente})$

(1) *Las deformaciones reales pueden ser diferentes de los valores estimados, particularmente si los valores de los momentos aplicados se encuentran próximos al momento de fisuración. Las diferencias dependerán de la dispersión de las propiedades del material, de las condiciones ambientales, de la historia de cargas, de las coacciones en los apoyos, de las condiciones del suelo, etc. (CEE-21, Anejo 19 - 7.4.1 (6) NOTA)*

2. FLECHAS EN ELEMENTOS PARCIALMENTE FISURADOS

Dada una pieza de hormigón armado sometida a flexión, la formación de fisuras modifica sustancialmente el funcionamiento de la misma. El valor de *Inercia* a considerar en los cálculos habrá de ser un valor intermedio entre el de la sección sin fisurar y homogeneizada y la sección fisurada homogeneizada.

Según el apartado 7.4.3 del Anejo 19, *“los elementos que se considere que no van a recibir cargas que puedan rebasar la resistencia a tracción del hormigón se considerarán no fisurados. Aquellos otros que puedan fisurarse, pero no de manera completa, se considerarán en un estado intermedio entre no fisurado y totalmente fisurado”*. Su comportamiento puede estimarse a través de la expresión:

$$\alpha = \zeta \cdot \alpha_{II} + (1 - \zeta) \cdot \alpha_I$$

Donde α es el parámetro de deformación considerado que puede ser, por ejemplo, una deformación, una curvatura o un giro y **puede tomarse como una flecha**, hipótesis adoptada en nuestro caso.

α_I y α_{II} son, respectivamente, los valores del parámetro calculados para una sección no fisurada y para una completamente fisurada.

Por tanto, la expresión para el cálculo de la flecha instantánea de un elemento parcialmente fisurado queda de la forma:

$$y = \zeta \cdot y_{II} + (1 - \zeta) \cdot y_I$$

Donde y_I es la flecha instantánea calculada considerando la *inercia bruta* del elemento e y_{II} , la flecha instantánea calculada con la *inercia fisurada*.

Equivale a calcular la flecha instantánea con una **inercia equivalente** (I_{eq}) obtenida mediante la ponderación de las inversas de las inercias bruta (I_b) y fisurada (I_{fis}).

$$\frac{C}{I_{eq}} = \zeta \cdot \frac{C}{I_{fis}} + (1 - \zeta) \cdot \frac{C}{I_b}$$

Por ejemplo, la flecha en centro de vano de una viga biapoyada cargada uniformemente:

$$y = \frac{5p\ell^4}{384 \cdot E \cdot I} = \frac{C}{I} \quad \frac{5p\ell^4}{384 \cdot E \cdot I_{eq}} = \zeta \cdot \frac{5p\ell^4}{384 \cdot E \cdot I_{fis}} + (1 - \zeta) \cdot \frac{5p\ell^4}{384 \cdot E \cdot I_{br}}$$

Continuemos con el análisis de expresión de la flecha equivalente: ζ es un coeficiente de distribución que tiene en cuenta la participación del hormigón traccionado en la sección y se obtiene como:

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2$$

$$\zeta = 0 \quad \text{para secciones no fisuradas}$$

Según el Código Estructural, en flexión, (σ_{sr}/σ_s) puede ser reemplazado por (M_{cr}/M) , con lo que el coeficiente de distribución quedará:

$$\zeta = 1 - \beta \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2$$

donde M_{cr} es el momento de fisuración y M el momento actuante en un determinado instante.

Consideramos el coeficiente β igual a la unidad (flecha instantánea), con lo que la expresión para el cálculo de la flecha queda de la forma siguiente:

$$\frac{C}{I_{eq}} = \zeta \cdot \frac{C}{I_{fis}} + (1 - \zeta) \cdot \frac{C}{I_b} = \left(1 - \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \right) \cdot \frac{C}{I_{fis}} + \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \cdot \frac{C}{I_b}$$

Reorganizando la expresión se obtiene la siguiente fórmula para el cálculo de una *inercia equivalente* ponderando las inversas de las inercias bruta y fisurada:

$$\frac{1}{I_{eq}} = \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \cdot \frac{1}{I_b} + \left(1 - \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{I_{fis}}$$

Esta fórmula para el cálculo de la inercia equivalente es la **fórmula de Bischoff**, aplicada también en normas europeas como el Eurocódigo 2 o la norma BS 8110-2. Otros códigos, como la instrucción EHE-08, ACI 318 o CSA A23.3, utilizan para este cálculo la fórmula de Branson de forma análoga.

2.1.- Inercia de la sección en un determinado instante o escalón de carga

El método de Bischoff se toma como base para el cálculo de la *flecha instantánea*, por lo que es necesario emplear el valor de M e I_{fis} correspondiente al nivel de carga considerado, así como el valor del módulo elástico para dicho instante de cálculo.

La flecha producida por un incremento de carga del valor p_1 al p_2 debe ser calculada como diferencia de las flechas correspondientes a los niveles p_1 y p_2 , y no como flecha debida al incremento $p_2 - p_1$.

2.2.- Inercia equivalente de la viga

La fórmula de Bischoff calcula la inercia correspondiente a una situación de fisuración parcial para una determinada sección de la viga. En el cálculo de la flecha implementado se considera un único valor del momento de inercia para toda la pieza. Éste se corresponde con el de una sección concreta o bien con la ponderación de las inercias de diferentes secciones de referencia de la viga en función de las condiciones de apoyo de la misma. Se considera una serie de casos tipo y para cada caso tipo se estipula qué sección o secciones deben contribuir al cálculo de la inercia equivalente para toda la pieza. Estos casos se definen en diversas normativas y métodos de cálculo. Un ejemplo puede ser:

Caso a)	Caso b)	Caso c)	Caso d)
elementos simplemente apoyados	elementos en voladizo	vanos internos de elementos continuos	vanos externos con continuidad sólo en uno de los apoyos
$I_{eq} = I_{ec}$	$I_{eq} = I_{ee}$	$I_{eq} = 0.5 \cdot I_{ec} + 0.25(I_{ee1} + I_{ee2})$	$I_{eq} = 0.75 \cdot I_{ec} + 0.25 \cdot I_{ee}$

donde:

I_{ec} : Inercia equivalente de la sección de centro de vano

I_{ee} : Inercia equivalente de la sección de apoyos

En el procedimiento implementado, la inercia equivalente constante para la viga y escalón de carga, se calcula asimilándola a uno de los casos tipo definidos. Cuando no es posible la equiparación con un único caso tipo, se interpola entre los mismos, de forma que la inercia equivalente del elemento se puede expresar como combinación de las inercias definidas para dichos casos:

$$I_{e,viga} = \alpha_A \cdot I_{e,caso A} + \alpha_B \cdot I_{e,caso B} + \alpha_C \cdot I_{e,caso C} + \alpha_D \cdot I_{e,caso D}$$

3.- FLECHAS DIFERIDAS

Cuando se evalúa la flecha de un elemento constructivo, además de la flecha instantánea, otra magnitud fundamental a considerar es la **flecha diferida**, que es el incremento de la deformación producido al mantener aplicadas las cargas en el tiempo.

El Código Estructural, en el apartado 7.4.3 (5) del Anejo 19 comenta: *“En el caso de cargas con una duración suficiente como para dar lugar a la aparición del fenómeno de fluencia, la deformación total, incluida la de fluencia, puede calcularse utilizando de un módulo de elasticidad efectivo del hormigón, de acuerdo con la expresión:”*

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(\infty, t_0)}$$

Donde $\varphi(\infty, t_0)$ es el coeficiente de fluencia para la carga y el intervalo de tiempo considerados.

Sustituyendo la expresión del módulo de elasticidad en la expresión de la flecha:

$$\frac{C}{E_{c,eff} \cdot I_{eq}} = \zeta \cdot \frac{C}{E_{c,eff} \cdot I_{fis}} + (1 - \zeta) \cdot \frac{C}{E_{c,eff} \cdot I_b}$$

$$\frac{C}{E_{cm} \cdot I_{eq}} \cdot (1 + \varphi(\infty, t_0)) = \zeta \cdot \frac{C}{E_{cm} \cdot I_{fis}} \cdot (1 + \varphi(\infty, t_0)) + (1 - \zeta) \cdot \frac{C}{E_{cm} \cdot I_b} \cdot (1 + \varphi(\infty, t_0))$$

$$\frac{C}{E_{cm} \cdot I_{eq}} \cdot (1 + \varphi(\infty, t_0)) = \left(\zeta \cdot \frac{C}{E_{cm} \cdot I_{fis}} + (1 - \zeta) \cdot \frac{C}{E_{cm} \cdot I_b} \right) \cdot (1 + \varphi(\infty, t_0))$$

Se obtiene la flecha total como suma de dos partes que se pueden asimilar a una flecha instantánea y a una flecha diferida que se obtiene a partir de la instantánea multiplicándola por un coeficiente que es función del tiempo:

$$Y_{tot} = Y_{inst} \cdot (1 + \varphi(\infty, t_0)) = Y_{inst} + Y_{inst} \cdot \varphi(\infty, t_0) = Y_{inst} + Y_{dif}$$

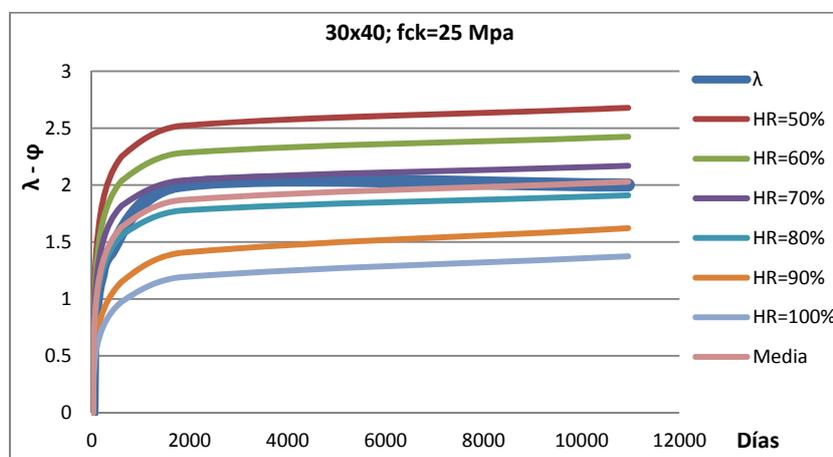
De esta manera, se puede establecer una analogía entre la flecha diferida que considera el Código Estructural, $Y_{dif} = Y_{inst} \cdot \varphi(\infty, t_0)$, y la de códigos como EHE-08 o código ACI: $Y_{dif} = Y_{inst} \cdot \lambda$, planteándonos la posibilidad de aplicar los valores del parámetro λ en el cálculo de la flecha diferida.

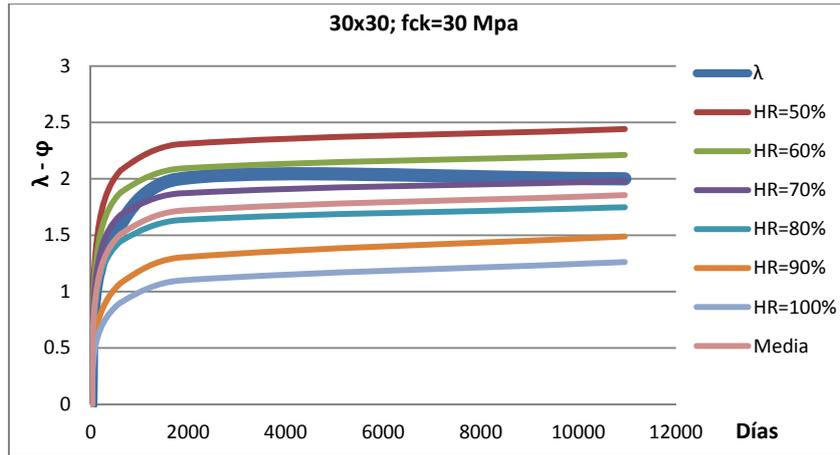
Según los códigos mencionados, las deformaciones diferidas en el tiempo, debidas a la fluencia y retracción del hormigón, son evaluadas por simple amplificación de las flechas instantáneas utilizando un coeficiente λ que es función del tiempo y las condiciones de humedad y exposición a la atmósfera de la pieza.

Teniendo en consideración los siguientes puntos:

- El factor λ permite tener en cuenta la flecha producida por la *retracción* y la *fluencia* mediante una formulación simplificada.
- El coeficiente $\varphi(t, t_0)$ tiene en cuenta la fluencia y depende de parámetros como la humedad relativa que puede ser muy variable a lo largo de la vida de un elemento.
- EHE-08 (art.39.8) y CE (Anejo 19, 3.1.4 – Apéndice B) calculan el **coeficiente de fluencia** utilizando la misma formulación.
- EHE-08 (art.39.7) y CE (Anejo 19, 3.1.4-Apéndice B) calculan el **coeficiente de retracción** utilizando la misma formulación.

Se analizaron diferentes casos, considerando distintos valores de humedad relativa (HR), así como diferentes dimensiones para la sección de la viga y distintos valores de resistencia del hormigón, obteniendo valores del coeficiente de fluencia φ y comparándolos con los del parámetro λ . A continuación se muestran algunos de los casos estudiados.





Valorando que la media de los ϕ calculados toma valores muy próximos a los del parámetro λ y ante la variabilidad de datos como la humedad relativa, en el cálculo implementado, se opta por utilizar los valores del parámetro λ para el cálculo de la flecha diferida.